**排列与组合的概念与计算公式**

**1．排列 （在乎顺序）**

全排列：n个人全部来排队，队长为n。第一个位置可以选n个，第二位置可以选n-1个，以此类推得： P(n,n)=n(n-1)(n-2)……3\*2\*1= n! (规定0!=1).

部分排列：n个人选m个来排队(m<=n)。第一个位置可以选n个，第二位置可以选n-1个，以此类推，第m个（最后一个）可以选(n-m+1)个，得：

P(n,m)=n(n-1)(n-2)……(n-m+1)= n! / (n-m)! (规定0!=1).

**2．组合（ 不在乎顺序）**

 n个人m(m<=n)个出来，不排队，不在乎顺序C(n,m)。如果在乎排列那么就是P(n,m)，如果不在乎那么就要除掉重复，那么重复了多少？同样选出的来的m个人，他们还要“全排”得到P(n,m)，所以得： C(n,m) \* m! = P(n,m)

C(n,m)= P(n,m) / m!=n! / ( (n-m)! \* m! )

组合数的性质1:

组合数的性质２: 如果编程实现,以上两个公式有没有帮助？

练习：、、、、

**3．其他排列与组合**

**（1）圆排列：**n个人全部来围成一圈为Q(n,n)，其中已经排好的一圈，从不同位置断开，又变成不同的队列。所以：Q(n,n)\*n=P(n,n) 🡪>>> Q(n)=P(n,n)/n=(n-1)！

由此可知，部分圆排Q(n,r)＝P(n,r)/r=n!/(r\*(n-r)!).

**（2）重复排列 (有限)**：k种不一样的球，每种球的个数分别是a1,a2,...ak,设n=a1+a2+…+ak，这n个球的全排列数，为 n!/(a1!\*a2!\*...\*ak!).

**（3）重复组合 (无限)**：n种不一样的球，每种球的个数是无限的,从中选k个出来，不用排列，是组合，为C(n+k-1,k).

证明：假设选出来的数（排好序）1<=b1<=b2<=b3…….<=bk<=n

这题的难点就是=号，现在去掉=号，所以有：

 1<= b1 < b2+1 < b3+2 < b4+3 …….< bk+k-1 <=n+k-1

 中间还是k个数！不过已经不是b系列，而是c系列

 **假设c[i]:=b[i]+i-1，所以**

1<= c1 < c2 < c3 < c4 …….< ck <=n+k-1

所以问题就开始转换为无重复组合问题，即在n+k-1个元素中选中k个的组合数C(n+k-1,k)。

**(4)不相邻排列**：1~n这n个自然数中选k个，这k个数中任何两个数不相邻数的组合有C(n-k+1,k).

 证明和（3）相同，同学们马上证明吧。

 **(5)第二类 stirling数（子集划分）**： **要背**

（\*\*2007普及）、将n个数（1，2，…，n）分成r个部分。每个部分至少一个数。将不同划分方法的总数记为S(n,r)。例如，S(4,2)=7，这7种不同的划分方法依次为 { (1) , (234) }，{ (2) , (134) }，{ (3) , (124) }，{ (4) , (123) }，{ (12) , (34) }，{ (13) , (24) }，{ (14) , (23) }。当n=6，r=3时，S(6,3)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。
（提示：先固定一个数，对于其余的5个数考虑S(5,3)与S(5,2)，再分这两种情况对原固定的数进行分析。）
题解：90. 递推的解法近几年很重要。

S(6,3) = 3\*S(5,3) + S(5,2)

S(5,3) = 3\*S(4,3) + S(4,2)

S(5,2) = 2\*S(4,2) + S(4,1)

第二类stirling数，显然拥有这样的性质：

① S(n,m) = m\*S(n-1,m) + S(n-1,m-1)

② S(n,1) = 1, S(n,0)=0, S(n,n)=1

而这些性质就： ▲ S(n,3) = 1/2 \*( 3^(n-1) +1) - 2^(n-1)

**(6)错位排列（简称:错排）**

先做一个小问题：5本书，编号分别是1，2，3，4，5，现在要把这5本书是放在编号1，2，3，4，5的书架上，要求书的编号和书架的编号不一样，请问有多少种不一样的放置方法？

例：***胸口贴着编号***为1,2,....n的***n个球员***分别住在 编号为1,2,....n的***n个房间*** 里面。现规定每个人住一个房间，自己的编号不能和房间的编号一样。

这就是**错排问题**。当n=3时，只能为312或231这两种。

题解：递推。刚开始所有球员都住在和自己编号一样的房间里面。然后错排开始了，第n个球员从第出来。

第一种情况：n想和（）其中任何一个球员换房间，其他 n-2个人换房间的事情，他们就不管了。其他n-2个球员的的错排数为d[n-2]，n可以和前面1~（n-1）对换，所以有  **（n-1）个d[n-2]。**

第二种情况：n想和（）其中任何一个球员换房间，但是n只想住在第个房间，而n不想住第个房间。

可能你会这样想：那么可以让住在第号房间里面，然后住在房间。抱歉，生气为什么一开始就去找不直接来找，~~(╯﹏╰) ~~

没办法，把自己胸口的编码换成了，他假装自己是，然后错排１～ｎ－１（也就是 d[n-2]）。的时候参与进去，这样自己就不会呆在第号房间了。所以有 **（n-1）个d[n-１]。**

如果理解了上面两个加　**蓝色**　的地方，那么错排的公式就出来了



同时也有

错位排列数列为 0，1，2，9，44，265， ．．．．．．

**(7)Catalan 数列（重点）**

以下问题属于Catalan数列

1：有2n个人排成一行进入剧场。入场费5元。其中只有n个人有一张5元钞票，另外n人只有10元钞票， 剧院无其它钞票，问有多少中方法使得只要有10元的人买票，售票处就有5元的钞票找零？

2：一位大城市的律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走2n个街区去上班。如果他从不穿越（但可以碰到）从家到办公室的对角线，那么有多少条可能的道路？

3：在圆上选择2n个点,将这些点成对连接起来使得所得到的n条线段不相交的方法数?

4：对角线不相交的情况下，将一个凸多边形区域分成三角形区域的方法数?

5：一个栈(无穷大)的进栈序列为1,2,3,..n,有多少个不同的出栈序列?

6：n个结点可够造多少个不同的二叉树?

7：n个不同的数依次进栈，求不同的出栈结果的种数？

8：n个+1和n个-1构成2n项 a1,a2,...,a2n      其部分和满足a1+a2+...+ak>=0(k=1,2,3,..,2n)对与n该数列为

其对应的序列为1, 1, 2, 5, 14, 42, 132,.... ===Catalan数列。

 H0 H1 H2 H3 H4 H5 H6

该递推关系的解为

**练习**

1．（1）用0，1，2，3，4组合多少无重复数字的四位数？

（2）这四位数中能被4整除的数有多少个？

（3）这四位数中能被3整除的数有多少个？

2．用0，1，2，3，4五个数字组成无重复数字的五位数从小到大依次排列.

（1）第49个数是多少？

（2）23140是第几个数？

3．求下列不同的排法种数：

（1）6男２女排成一排，2女相邻；

（2）6男２女排成一排，2女不能相邻；

（3）5男3女排成一排，3女都不能相邻;

（4）4男4女排成一排，同性者相邻；

（5）4男4女排成一排，同性者不能相邻。

4．有四位医生、六位护士、五所学校。

(1) 若要选派三位医生到五所学校之中的三所学校举办健康教育讲座，每所学校去一位医生有多少种不同的选派方法？

(2)在医生或护士中任选五人，派到五所学校进行健康情况调查，每校去且仅去一人，有多少种不同的选派方法？

(3) 组成三个体检小组，每组一名医生、两名护士，到五所学校中的三所学校为老师体检，有多少种不同的选派方法？

5．平面上有三条平行直线，每条直线上分别有7，5，6个点，且不同直线上三个点都不在同一条直线上。问用这些点为顶点，能组成多少个不同四边形？

6．平面上有三条平行直线，每条直线上分别有7，5，6个点，且不同直线上三个点都不在同一条直线上。问用这些点为顶点，能组成多少个不同三角形？

7．将N个红球和M个黄球排成一行。例如:N=2,M=2可得到以下6种排法:

红红黄黄 红黄红黄 红黄黄红 黄红红黄 黄红黄红 黄黄红红

问题:当N=4,M=3时有多少种不同排法?(不用列出每种排法)

8.用20个不同颜色的念珠穿成一条项链,能做多少个不同的项链.

9.在单词MISSISSIPPI 中字母的排列数是( )

10．求取自1,2,...k的长为r的非减序列的个数为( )

答案：

1：（1）分类+组合，96 ；（2）分类+组合，30；（3）分类+组合，36

2：（1）40；（2）30124

3：（1）p(7,7)\*p(2,2)； （2）p(6,6)\*p(7,2)； （3）p(5.5)\*p(6,3)

（4）p(4,4)\*p(4,4)\*p(2,2)； （5）p(4,4)\*p(4,4)\*p(2,2))

4：（1）p(10,5)； （2）c(5,3)\*p(4,3)\*c(6,2)\*c(4,2)\*c(2,2) （3）c(5,3)\*p(4,3)

5：2250

6：751

7：35

8：(20!/20)=19！

9：11!/(1!\*4!\*4!\*2!

10：C(r+k-1,r)